

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-62/118 (1962)

C. Bernardini, E. Persico, P. G. Sona, A. Turrin: L'ELETTROSINCRO-  
TRONE: IL PROGETTO DEL VUOTO.

Estratto dal: Nuovo Cimento, Suppl. 24, 64 (1962)

## PARTE II.

### Il progetto teorico.

C. BERNARDINI, E. PERSICO, P. G. SONA e A. TURRIN

#### 1. - Introduzione.

Ci occuperemo ora di quei parametri « fini » che direttamente controllano l'efficienza e l'intensità dell'elettrosincrotrone (e.s.). Molte delle considerazioni seguenti si possono estendere facilmente a macchine simili alla nostra.

Lo studio dei parametri « fini » può suddividersi in quattro classi principali, che contraddistingueremo con i seguenti titoli:

- traiettorie;
- meccanismo di iniezione;
- meccanismo di cattura a RF;
- variazioni adiabatiche dell'intensità (scattering, radiazione, ecc.).

La bibliografia generale, relativa ai singoli paragrafi, è riportata per comodità alla fine di questa Parte II. Inoltre, si dà anche un elenco delle notazioni generali di uso comune.

#### 2. - Traiettorie.

A) *Scelta dell'indice del campo.* - Il primo compito consiste nella scelta dell'indice di campo  $n$ . Questa scelta deve soddisfare ai seguenti requisiti:

1) l'indice deve essere lontano dai limiti di stabilità sia verticale che orizzontale;

2) l'indice deve essere lontano da valori di risonanza di ordine basso.

1) La condizione di stabilità per un « racetrack » (sincrotrone a settori) a 4 settori è

$$|\cos \mu| = \left| \cos \left( \frac{\pi}{2} g \right) - g \frac{L}{R} \sin \left( \frac{\pi}{2} g \right) \right| < 1,$$

dove

$$g = \sqrt{n}, \quad \text{per le oscillazioni verticali,}$$
$$g = \sqrt{1-n}, \quad \text{per le oscillazioni radiali,}$$

e la scelta  $n = 0.61$  soddisfa al primo requisito: infatti, per le oscillazioni verticali  $\cos \mu = 0.214$ , per le orizzontali  $\cos \mu = 0.470$ .

2) Per quanto riguarda il secondo requisito, la condizione di risonanza per un racetrack può esprimersi con ottima approssimazione nella forma [1]

$$p + \left(1 + \frac{L}{\pi R}\right) (q\sqrt{1-n} + r\sqrt{n}) = 0, \quad \left(\frac{L}{R\pi} \ll 1\right),$$

essendo  $p, q, r$  interi positivi o negativi (Fig. II.1). Segue che si hanno risonanze di ordine basso per

$$\begin{aligned} p = -1, \quad q = +1, \quad r = 0, \quad n = 0.24, \\ p = -1, \quad q = 0, \quad r = +1, \quad n = 0.76, \\ p = 0, \quad q = +1, \quad r = -1, \quad n = 0.5. \end{aligned}$$

Le prime corrispondono (nel limite  $L/R \rightarrow 0$ ) alle classiche  $n=0$  ed  $n=1$ , rispettivamente, delle macchine circolari; la terza è la caratteristica « coupling resonance » (risonanza di accoppiamento) che si produce quando le frequenze di betatrone orizzontale e verticale sono uguali e quindi, indipendentemente da  $L/R$ ,  $1-n = n = 0.5$ .

Altre risonanze lineari si hanno per

$$|p| = |q| = |r| = 1,$$

con le varie combinazioni di segni possibili. Esse richiedono la presenza simultanea di un accoppiamento verticale-orizzontale e di una inomogeneità del campo in prima armonica. Si hanno tutte per

$$n \simeq \left(\frac{L}{\pi R}\right)^2,$$

e pertanto non destano preoccupazioni. Non si hanno risonanze entro i limiti di stabilità per  $q, r=1.0$  e  $p \geq 2$ . Per dare un esempio di come si discutono le risonanze lineari tratteremo in Appendice I la risonanza  $p=2, q=1, r=0, n_{\text{ris}}=0.816$  ( $n_{\text{ris}}=\frac{3}{4}$  se si tratta di un sincrotrone circolare). Inoltre, quelle risonanze che corrispondono a  $q, r \geq 2$  sono certamente dovute alla presenza di perturbazioni non armoniche (ovvero non lineari) e pertanto il loro contributo va considerato certamente meno catastrofico di quello delle risonanze lineari sopra menzionate: infatti è vero, abbastanza in generale, che i

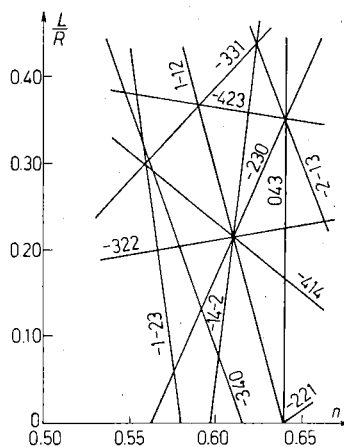


Fig. II.1.

tempi di incremento delle ampiezze di oscillazione dovuti alla presenza di una perturbazione non lineare risonante sono molto più lunghi dei tempi dovuti ad una perturbazione lineare risonante di grandezza confrontabile. Per confrontabile qui si intende che, per esempio, un dato errore sul valore del campo è attribuito una volta ad un tipo di perturbazione, una volta all'altro.

Si può concludere che la scelta dell'indice  $n$  gode di una certa libertà; entro limiti che dal punto di vista del disegno del profilo polare si possono considerare piuttosto elastici (v. Parte III). Tuttavia, il particolare valore assunto nel progetto, cioè  $n = 0.61$ , ha anche un discreto margine di sicurezza rispetto a risonanze di ordine elevato [1]. Sono state studiate, a titolo di indagine semi-quantitativa, due risonanze non lineari vicine al valore  $n = 0.61$  (v. Appendice II); il metodo impiegato è quello di Kryloff e Bogoliuboff. Le risonanze in questione sono

$$\begin{aligned} p = -2, \quad q = 3, \quad r = 0, \quad n = 0.634, \\ p = -1, \quad q = -1, \quad r = 2, \quad n = 0.593. \end{aligned}$$

Le soluzioni risonanti divergono più o meno lentamente (a seconda delle condizioni iniziali) [2]. Tuttavia, essendo la condizione di esatta risonanza vincolata ad una perturbazione di tipo estremamente particolare, queste divergenze non destano serie preoccupazioni.

*B) Tolleranze sulle irregolarità del campo.* — Un secondo compito consiste nella prescrizione delle tolleranze sulle variazioni azimutali (a parte la presenza dei tratti dritti) dei parametri che definiscono il campo. Queste tolleranze sono state studiate per un racetrack a quattro settori e per i seguenti tipi di perturbazione:

- 1) lunghezza effettiva delle testate;
- 2) forma delle testate;
- 3) variazioni azimutali del campo sull'orbita principale (di raggio  $R$ ) nei quadranti.

Per quanto riguarda il punto 3) si rinvia alla Parte III, Cap. VI, ove si danno le considerazioni relative all'ordinamento dei blocchi del magnete. Qui di seguito diamo un riassunto delle principali formule relative agli effetti delle perturbazioni ora elencate.

Si intende che la grandezza rilevante è l'ampiezza dell'orbita chiusa prodotta da ciascuna perturbazione (salvo nel caso 2); queste ampiezze sono additive nel senso che l'ampiezza risultante è una combinazione lineare delle singole, con coefficienti in modulo  $\leq 1$ , dipendenti dalla localizzazione relativa delle perturbazioni.

1) Se l'apertura angolare effettiva di ciascun quadrante è  $\pi/2 - 2\varepsilon$  (essendo ciascuna testata arretrata di  $\varepsilon$  radianti) l'orbita chiusa oscilla attorno al cerchio ideale raccordato di raggio  $R$  con una ampiezza

$$A = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos(\sqrt{1-n} \pi/4)}{\sin(\sqrt{1-n} \pi/4)} \frac{R\varepsilon}{\sqrt{1-n}}.$$

Se invece gli otto valori di  $\varepsilon$  relativi a ciascuna testata sono distribuiti a caso con valore quadratico medio  $\varepsilon$ , allora

$$A \simeq \frac{2\sqrt{2}R\varepsilon}{\sqrt{1-n}}.$$

2) Se l'apertura angolare effettiva di un quadrante dipende dal raggio ed è  $\pi/2 - 2\alpha x/R$ , come se la normale ad ogni testata fosse ruotata di  $\alpha$  rispetto alla tangente al cerchio ideale raccordato, si ottiene un effetto equivalente ad una variazione

$$\delta n = \frac{4}{\pi} \frac{\sin \sqrt{1-n} \pi/2 + \sqrt{1-n} (L/R) \cos \sqrt{1-n} \pi/2}{(1 + L/\pi R) \sin \sqrt{1-n} \pi/2 + \sqrt{1-n} (L/2R) \cos \sqrt{1-n} \pi/2} \alpha,$$

del valore di  $n$  di quel quadrante.

3) È possibile far vedere [3] che in un sincrotrone racetrack la presenza delle sezioni diritte peggiora notevolmente (rispetto al caso circolare) l'effetto delle ben note « armoniche di campo » di ordine elevato. Infatti mentre l'ampiezza dell'orbita chiusa per una armonica di ordine  $m \gg 1$  nel caso circolare è proporzionale a  $1/m^2$ , nel caso racetrack essa si comporta come  $1/m$ . Questo è fisicamente intuitivo se si pensa che nel caso racetrack si fa sentire l'effetto degli angoli di emergenza dalle testate e che questi a loro volta sono tanto più grandi quanto maggiore è la frequenza della perturbazione. Tuttavia, è chiaro che se la somma delle armoniche della perturbazione è convergente, a maggior ragione lo sarà, in ogni caso, la somma delle armoniche dell'orbita chiusa: la circostanza del comportamento con  $1/m$  va considerata, se si fa un'analisi armonica del campo, solo in quanto il numero delle armoniche rilevanti agli effetti della prescrizione delle tolleranze è più grande in un racetrack che non in una macchina circolare.

Si può far vedere [3] che con l'uso di un campo correttivo per ogni testata e per ogni modo (verticale od orizzontale) di oscillazione è possibile sopprimere queste oscillazioni di orbita chiusa a lenta convergenza, riducendo così un racetrack a  $N$  settori ad un sincrotrone circolare equivalente, mediante l'introduzione di  $4N$  campi correttivi localizzati. Anche questo è intuitivo, in quanto

le correzioni non fanno altro che agire sugli angoli di emergenza o di ingresso dei quadranti, compensando così l'inconveniente sopra accennato. I dettagli matematici su questi argomenti sono riportati in Appendice III.

Da questo tipo di calcolo si deduce *a priori* quali sono le limitazioni sulla combinazione passo-precisione con cui vanno condotte le misure del campo lungo l'azimut. In pratica, i calcoli di ampiezza della orbita chiusa svolti *a posteriori*, cioè a misure effettuate, sono stati eseguiti con altro criterio (v. Parte III, Cap. VI), pur sfruttando il risultato che consiste nella possibilità di limitarsi a calcolare gli effetti per una macchina circolare equivalente.

Infine, particolarmente delicato è lo studio delle perturbazioni del piano mediano, in quanto l'apertura verticale del traferro è il più stretto vincolo sulle tolleranze (per ovvie ragioni di economia). Per piano mediano, nella macchina ideale, si intende il piano di simmetria della coppia di espansioni polari superiore ed inferiore: esse devono risultare angolate (in versi opposti) e distanziate rispetto a questo piano onde assicurare la massima utilizzazione del traferro.

Se però questo piano mediano è in realtà ondulato a causa di traslazioni erratiche dei pezzi polari nella direzione verticale, oppure a causa di rotazioni del profilo polare che alterano l'angolazione con il piano geometrico di riferimento, ne risultano tre possibili effetti:

- a) modulazione della componente radiale del campo;
- b) modulazione dell'indice  $n$ ;
- c) accoppiamento dei due modi, verticale ed orizzontale, di oscillazione di betatrone.

Di questi tre effetti, il primo, *a*), è di gran lunga il più importante all'atto pratico. Da esso infatti discendono delle prescrizioni tali da rendere, se sono rispettate, completamente insensibili le conseguenze degli altri due.

È ovvio che una traslazione parallela di tutto il profilo polare (o superiore) di  $\Delta z$  è una variazione di traferro di pari entità. Se però la traslazione è localizzata o, più in generale, è una certa funzione  $\Delta z(\theta)$  dell'azimut, allora la nuova orbita chiusa va calcolata dall'equazione

$$z'' + nz = n\Delta z(\theta),$$

e la sua ampiezza darà la corrispondente variazione equivalente di traferro utile. Questi calcoli si effettuano con i metodi già descritti (in particolare 3) [3].

Consideriamo poi una rotazione di uno dei profili polari di un piccolo angolo  $\varepsilon$  rispetto alla sua angolazione ideale con il piano geometrico mediano. Questa rotazione (che produce anche un accoppiamento orizzontale-verticale) ha come principale effetto l'avvicinamento del piano magnetico mediano al polo ruo-

tato, di

$$(II.1) \quad \Delta z = \frac{R}{n} \varepsilon,$$

se l'angolo tra i due profili superiore ed inferiore è diminuito di  $\varepsilon$ . Infatti, per rotazione delle linee di forza del campo, una parte della componente verticale sul piano geometrico mediano si muta in componente radiale; e questa è  $B_0\varepsilon(1 - nx/R)$ . Conseguentemente la nuova componente radiale si annulla ad una quota differente da quella ideale; essendo ora

$$(II.2) \quad B_r = -n \frac{B_0}{R} z + B_0\varepsilon \left(1 - n \frac{x}{R}\right),$$

annullando  $B_r$ , si ottiene la (II.1) (trascurando il termine in  $x/R$ , del secondo ordine in  $\varepsilon x$ ). Come si vede, il grosso fattore  $R/n$  nella (II.1) prescrive una notevole cura nella realizzazione della condizione  $\varepsilon = 0$ . A titolo di confronto, l'angolo  $\alpha$  tra i due profili polari che corrisponde ad un dato  $n$  è

$$\alpha = 2n \frac{h_0}{R},$$

avendo indicato con  $h_0$  l'altezza media del traferro. La (II.1) si può riscrivere

$$\frac{\Delta z}{h_0} = \frac{2\varepsilon}{\alpha}.$$

Ritornando alla (II.2), il termine trascurato (in  $x/R$ ) è quello che produce l'accoppiamento tra i due modi normali di betatrone. Se è vero che i suoi effetti sono insensibili su tempi dell'ordine del giro, è anche vero tuttavia che una lenta conversione dell'ampiezza radiale di oscillazione in ampiezza verticale può rivelarsi seriamente dannosa. Infatti, sia per il meccanismo di iniezione (v. Sez. 3), a bassa energia, sia per le fluttuazioni di radiazione (v. Sez. 5, B)) all'energia più elevata, le ampiezze radiali sono generalmente più grandi di quelle verticali e la conversione suddetta può compromettere seriamente l'utilizzazione del traferro verticale. È molto difficile calcolare questo effetto di  $\varepsilon$  salvo che per il caso  $\varepsilon = \text{costante}$  con l'azimut; in questo caso si constata facilmente che solo quando  $n \simeq 0.5$  si ha conversione completa con una certa rapidità, e precisamente in

$$\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \text{ giri.}$$

È plausibile che nei casi più complicati l'effetto sia decisamente meno serio.

Infine, per quanto riguarda  $b$ ), e cioè la modulazione dell'indice  $n$  risultante da una variazione dell'angolo  $\alpha$  tra i due profili polari, basta garantirsi che questa perturbazione non conduca a risonanze di basso ordine.

### 3. - Meccanismo di iniezione.

Il meccanismo di iniezione adottato in questo e.s. si basa sulla spiralizzazione delle traiettorie di equilibrio, prodotta dalla variazione temporale del campo principale, quando ancora non sia stato acceso l'impianto acceleratore a radiofrequenza (RF).

Con questo sistema è possibile iniettare per tempi lunghi rispetto alla durata di un giro. In linea di principio, se  $\sigma$  è la spiralizzazione ed  $a$  è la distanza tra la bocca d'uscita del deflettore e la parete interna della ciambella, si può iniettare per  $a/2\sigma$  giri. In pratica, l'efficienza di iniezione è sensibilmente più bassa in quanto non tutte le particelle iniettate riescono ad evitare il deflettore quando ritornano in corrispondenza di esso.

Il problema dell'iniezione va studiato congiuntamente alla cattura da parte dell'impianto a RF; il rendimento combinato di iniezione e cattura verrà considerato più avanti. Qui discuteremo per il momento le probabilità di sopravvivenza degli elettroni nei giri che seguono al primo, indipendentemente dalla possibilità successiva di accelerazione.

Si fa l'ipotesi (probabilmente non del tutto appropriata) che le traiettorie abbiano la forma ideale; cioè si ignorano le perturbazioni del campo nei quadranti ed alle testate.

Vediamo ora quali sono i parametri principali che determinano il rendimento d'iniezione:

— la spiralizzazione

$$\sigma = \frac{R}{1-n} \frac{B_0}{B_0} T_0;$$

— l'ingombro del deflettore;

— la distribuzione angolare degli elettroni iniettati;

— la distribuzione dei momenti di iniezione.

In tutti i calcoli che seguono si è ragionevolmente supposto che l'ingombro verticale del deflettore sia infinito.

Si può ragionare intuitivamente su alcuni casi limite: supponiamo che  $\sigma \rightarrow 0$ , *coeteris paribus*. In questo caso il numero di elettroni iniettati che sopravvivono deve tendere a zero. D'altra parte, è anche evidente che per  $\sigma$  molto grande il numero di elettroni sopravvissuti deve diminuire perchè diminuisce il numero di giri utili per l'iniezione,  $a/2\sigma$ . Anzi, per  $\sigma$  grande, il numero di questi elettroni deve diventare insensibile alle modalità di iniezione finendo con l'essere proporzionale a  $1/\sigma$  (alto rendimento ma per un breve tempo). Segue che deve esserci una spiralizzazione optimum.



Sono stati eseguiti calcoli numerici con un procedimento geometrico che si basa sull'ipotesi di distribuzioni uniformi di angoli e momenti iniettati in intervalli di  $\pm 3$  mrad e  $\pm 2.5\%$  rispettivamente [4].

Si ottiene per l'appunto un andamento con  $\sigma$  come previsto, con un massimo per  $\sigma = 0.2$  cm (del resto molto piatto) corrispondente ad un rendimento  $\simeq 20\%$ . Il comportamento  $\sim 1/\sigma$  incomincia per  $\sigma = 0.4$  cm. In Appendice I esporremo come si conduce un calcolo del genere.

Un altro procedimento, quantitativamente meno attendibile, basato su una ipotesi di equiprobabilità di localizzazione dei massimi delle oscillazioni orizzontali dopo qualche giro, conduce allo stesso risultato almeno per quanto riguarda la dipendenza del numero di elettroni sopravvissuti da  $\sigma$ . Esso ha il vantaggio di fornire formule semplici che si possono combinare con le espressioni del rendimento di cattura in modo da ottenere il numero effettivo di elettroni accelerati [5].

Infine, sono stati effettuati calcoli che indicano la possibilità di ottenere una iniezione circa 2 volte più copiosa variando l'energia di iniezione in modo tale da iniettare in ogni istante particelle con piccole ampiezze di betatrone; si utilizza in tal modo una regione di ciambella circa due volte più larga radialmente.

#### 4. - Meccanismo di cattura a RF.

La cattura a RF è stata studiata in grande dettaglio (cattura rapida) ed in funzione di vari parametri [6, 7, 8].

Qui riporteremo i risultati essenziali, che si riferiscono principalmente al nostro e.s.

Si tratta sostanzialmente dello studio del meccanismo di formazione dei così detti bunches (pacchetti di elettroni) e del calcolo del loro riempimento. Si supporrà in quanto segue (salvo specificazione contraria) che:

- 1) le dimensioni radiali dei bunches siano contenute entro la ciambella;
- 2) che l'iniettore fornisca una corrente costante di elettroni per un tempo sufficientemente lungo;
- 3) che le particelle iniettate siano monocromatiche.

Nella teoria della cattura rapida si immagina che la tensione di cresta della cavità  $RF_1$  si porti al valore di regime  $V$  con un tempo di salita nullo. L'accensione della cavità avviene ad un tempo  $t^*$  che è deducibile dalle ipotesi ora elencate secondo il seguente ragionamento: sia  $t_0$  il tempo al quale l'orbita istantanea delle particelle monocromatiche iniettate passa per la bocca del deflettore. Se l'iniettore ha già cominciato ad immettere elettroni nella macchina, al tempo  $t_0$  si avranno le prime particelle circolanti, con ampiezza di betatrone nulla. Al tempo  $t_0 + (a/2\sigma)T_0$  l'orbita istantanea è a metà strada tra la bocca

del deflettore e la parete interna della ciambella: da questo istante in poi le particelle iniettate avranno ampiezza di betatrone  $> a/2$  e non verranno pertanto utilizzate; inoltre, cominceranno a perdersi anche le ultime particelle iniettate, a causa della spiralizzazione dell'orbita istantanea (che al tempo  $t_0 + (a/\sigma)T_0$  finirà sulla parete interna della ciambella). Segue che la scelta più conveniente di  $t^*$  è

$$t^* = t_0 + \frac{a}{2\sigma} T_0.$$

Se vi è uno sparpagliamento di energie iniettate, esso si traduce in uno sparpagliamento di valori di  $t_0$ , ed il ragionamento si complica. È intuitivo che in questo caso la durata utile dell'iniezione sarà più breve di  $(a/2\sigma)T_0$ , ma è difficile dare delle prescrizioni di uso generale.

All'istante  $t^*$ , quegli elettroni che si troveranno nell'intervallo di fasi stabili associato con la tensione  $V$  (e quindi con la fase sincrona  $\varphi_s$  fissata da  $V$  e da  $\dot{B}_0$ ) verranno catturati; a patto però che abbiano una ampiezza di betatrone che, sommata all'ampiezza delle oscillazioni di sincrotrone, non superi l'apertura utile della ciambella.

Ora, accettando le ipotesi 1), 2), 3), e scegliendo il valore di  $t^*$  ora dato, il calcolo sarebbe relativamente semplice in quanto si ridurrebbe a pure considerazioni sulle dimensioni geometriche dei bunches. Infatti, agli effetti di questo calcolo le ipotesi si tradurrebbero, nell'ordine, nelle seguenti:

- 1) vi è un'ampiezza di betatrone finita associata alla massima ampiezza di sincrotrone;
- 2) la distribuzione delle ampiezze di betatrone è, all'istante  $t^*$ , uniforme (tra 0 ed  $a/2$ );
- 3) all'istante  $t^*$  le ampiezze radiali di sincrotrone sono determinate dalla sola distribuzione (uniforme) delle fasi di attraversamento della cavità.

Ma si è detto, nella Sez. 3, che la probabilità di sopravvivenza di un elettrone (urti contro il deflettore) dipende dalla sua ampiezza di betatrone: dunque l'ipotesi 2) non può essere vera.

Per ottenere informazioni qualitative dal modello basato sulle tre ipotesi anzidette, si è supposto che il rendimento d'iniezione non dipendesse sensibilmente dall'ampiezza di betatrone. Introducendo un parametro  $\bar{q}$  che rappresenta una sorta di valor medio (sulle ampiezze di betatrone) della probabilità di sopravvivenza, si è dedotto l'andamento del rendimento di cattura in funzione dei vari parametri rilevanti ( $V$ ,  $\dot{B}_0$ ,  $k$  = armonica della cavità a RF,  $a/2$ ,  $n$ , ecc.) [6].

Con il modello statistico d'iniezione di cui alla fine della Sez. 3 [5] si vede che l'ipotesi 2) non è irragionevole se si suppone che la distribuzione delle ampiezze di betatrone sia uniforme entro un intervallo che va da un'ampiezza

minima (fissata da  $\sigma$  e dall'ingombro del deflettore) ad  $a/2$ , anzi che da 0 ad  $a/2$  (bibliografia [6], Sez. 5).

La principale conclusione di queste considerazioni è che, per una macchina come la nostra, deve essere possibile catturare un numero di elettroni pari alla carica iniettata a corrente costante per la durata di cinque o sei giri (circa  $0.5 \mu s$ ). Con la dizione « si cattura un giro » si deve intendere che il numero di elettroni accelerati è equivalente a quello che si accelererebbe iniettando per la durata di un giro a pari corrente (costante) con rendimento di iniezione e di cattura = 1.

Inoltre, l'andamento di questa durata equivalente d'iniezione,  $\vartheta_{\text{eff}}$ , con parametri principali della macchina è il seguente

$$\vartheta_{\text{eff}} \sim a^3 K^3 E_i^2 \left( \frac{\dot{q}}{\sigma} \right) B_0^{-1},$$

in corrispondenza di una tensione  $V$  che rende massimo  $\vartheta_{\text{eff}}$  e che si determina graficamente con un procedimento che non illustriamo (Fig. II.2) [6].

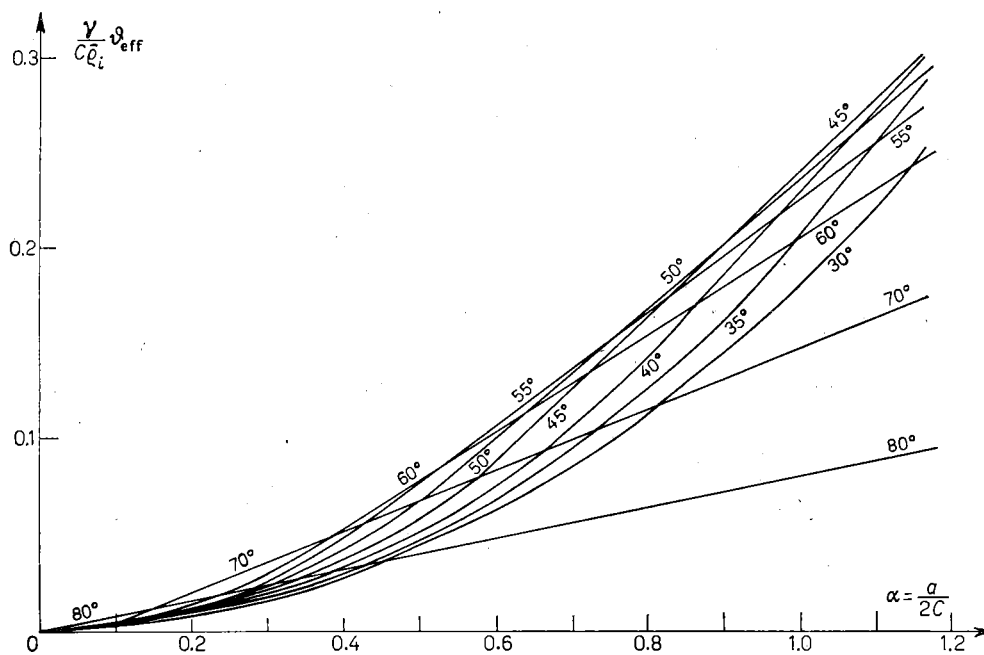


Fig. II.2.

Si comprende l'esistenza di questo  $V$  optimum dalla seguente considerazione: se  $V$  tende al valore minimo (associato con fase sincrona  $90^\circ$ ), l'intervallo di fasi catturato  $\rightarrow 0$  e quindi  $\vartheta_{\text{eff}} \rightarrow 0$ . Se  $V \rightarrow \infty$ , viene a cadere l'ipo-

tesi 1) e solo poche particelle prossime alla sincrona fanno un'escursione radiale (di betatrone+sincrotrone) contenuta entro l'apertura utile della ciambella. Dunque, dev'esserci un ottimo intermedio, c.v.d.

È stato anche studiato l'effetto di una sottoaccensione della cavità durante l'iniezione (tickler). La cavità è già accesa, con tensione insufficiente, all'istante di iniezione; all'istante  $t^*$  si porta (con un gradino) al valore di regime. Si può concludere che questa sottoaccensione non giova al rendimento di cattura, anzi lo peggiora.

Accenniamo ancora allo studio delle limitazioni della tensione di RF derivanti dall'esame dell'effetto della lenta modulazione del campo, della frequenza, dell'ampiezza della tensione stessa sulle traiettorie [9]. Si trova che la variazione adiabatica dei parametri ora detti può produrre una contrazione delle dimensioni utili dei bunches e quindi una fuga delle particelle marginali che li occupano (antidamping). In particolare, è necessario che la tensione non sia mai inferiore ad un valore  $V_{\min}$  che si ricava da un grafico [9] come funzione dell'energia, della spiralizzazione, ecc. Vi è anche una limitazione superiore [9], anch'essa dovuta alla necessità di non essere in condizioni di antidamping; ma questa, essendo molto larga (si richiede che  $V$  cresca meno rapidamente di  $E^3$ ), non ha interesse pratico.

Infine, il comportamento delle particelle nei bunches ad alta energia, quando intervenga la radiazione di sincrotrone, verrà esaminato più avanti (v. Sez. 5, B)).

## 5. - Variazioni adiabatiche dell'intensità.

Dedichiamo questo paragrafo a tutti quegli effetti (di varia natura) che influiscono sulla intensità del fascio durante il ciclo di accelerazione, quando sia ormai avvenuta la cattura da parte della  $RF_1$ . Distinguiamo come più importanti i seguenti:

- scattering sul gas residuo;
- fluttuazioni della radiazione di sincrotrone;
- effetti vari di carica spaziale.

A) *Scattering sul gas residuo.* - Questo problema di diffusione delle particelle del fascio accelerato per urti contro le molecole del gas residuo nella ciambella verso le pareti di essa è stato trattato da molti autori. Le difficoltà matematiche che sono presenti hanno due origini:

1) le ampiezze di oscillazione si riducono all'aumentare dell'energia a causa del damping adiabatico;

2) il coefficiente di diffusione (cioè l'angolo quadratico medio di scattering) è una funzione dell'energia.

La formulazione generalmente adottata consiste nello scrivere una equazione di Fokker-Planck nella distribuzione delle ampiezze di betatrone; da questo punto in poi si deve far ricorso a metodi approssimati di soluzione [10, 11, 12].

Tuttavia, è possibile, con un ragionamento semplice, riassumere i principali risultati, dando insieme una regola quantitativa che garantisce il buon funzionamento della macchina.

Poichè lo scattering è isotropo nel piano  $x-z$ , è evidente che basta limitarsi allo studio della diffusione nella direzione  $z$  in quanto l'apertura verticale  $b$  del traferro è molto più piccola di quella orizzontale. Sia  $A$  l'ampiezza di oscillazione verticale di betatrone; sappiamo che per il damping adiabatico

$$(II.3) \quad A^2 \sim \frac{1}{E}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dA^2}{dt} = -\frac{\dot{E}}{E} A^2.$$

In uno scattering

$$z \rightarrow z', \quad \frac{dz}{ds} \rightarrow \frac{dz'}{ds} + \alpha = z' + \alpha,$$

dove  $ds$  è l'arco infinitesimo sull'orbita di equilibrio e  $\alpha$  è l'angolo proiettato di scattering (nel piano delle oscillazioni verticali). Se  $2\pi\lambda$  è la lunghezza d'onda delle oscillazioni verticali, la variazione dell'ampiezza segue da

$$A^2 \rightarrow A^2 + 2\lambda^2 z' \alpha + \lambda^2 \alpha^2 = A^2 + dA^2.$$

Evidentemente  $z' \alpha$  ha valor medio nullo; quindi

$$(II.4) \quad \overline{dA^2} = \lambda^2 \overline{\alpha^2}.$$

Ora, come è ben noto dalla formula dello scattering multiplo

$$(II.5) \quad \overline{\alpha^2} = k \frac{P}{E^2} ds,$$

dove  $P$  è la pressione e  $k$  una costante che dipende solo dalla natura del gas. Inoltre, poichè gli elettroni si muovono con velocità  $\beta c$ ,

$$ds = \beta c dt.$$

Combinando le due variazioni (II.3) e (II.4) si ha

$$(II.6) \quad \frac{dA^2}{dt} = -\frac{\dot{E}}{E} A^2 + \beta c k \lambda^2 \frac{P}{E^2},$$

e questa è una equazione per l'ampiezza quadratica media di oscillazione di un elettrone in funzione dell'energia. Le difficoltà matematiche a cui si è accennato sopra riguardano la forma della distribuzione delle ampiezze  $A$  fra gli elettroni del fascio: infatti l'entità delle perdite dipende dall'essere questa distribuzione più o meno estesa verso le pareti della ciambella. Ora sappiamo che la larghezza quadratica media della distribuzione è governata dalla (II.6) e possiamo formulare la regola: se

$$\max A \ll b/2 ,$$

allora lo scattering non produce sensibili perdite. Si può facilmente vedere che se

$$A^2(E_i) = A_i^2 > A_m^2 = \frac{\beta ck\lambda^2 P}{\dot{E} E_i} ,$$

allora  $A^2 < A_i^2$  per ogni  $E > E_i$ ; Se  $A_i^2 < A_m^2$ , allora  $A^2 < A_m^2$  per ogni  $E > E_i$ . Per ottenere questo risultato, basta integrare la (II.6) trascurando la variazione temporale di  $\beta$  ed  $\dot{E}$  (come è generalmente lecito).

Segue che se

$$A_m^2 = \frac{\beta ck\lambda^2 P}{\dot{E} E_i} \ll \left(\frac{b}{2}\right)^2 ,$$

l'effetto dello scattering è trascurabile.

La costante  $k$  è

$$k = \frac{1}{2} \frac{E_1^2}{X_0 P_0} ,$$

dove  $E_1 = 21$  MeV,  $P_0$  è la pressione atmosferica ed  $X_0$  è la lunghezza di radiazione del gas residuo in condizioni normali di temperatura e di pressione (in unità di lunghezza e non densità  $\times$  lunghezza!).

Da questa semplice regola si deduce che, per un buon funzionamento della macchina di Frascati dev'essere

$$P \ll 10^{-5} \text{ mm Hg} ,$$

se i valori di  $\dot{E}$  corrispondono a spiralizzazioni  $> 0.2$  cm (v. Sez. 3).

Inoltre, dalla integrazione della (II.6), che dà

$$A^2 = A_i^2 \frac{E_i}{E} + A_m^2 \frac{E_i}{E} \ln \frac{E}{E_i} ,$$

si può vedere che per  $E > 2.7E_1$  tutte le ampiezze di betatrone hanno superato il massimo e decrescono con  $E$  (il damping prevale sullo scattering). Per la macchina di Frascati  $2.7E_1 \simeq 8 \text{ MeV}$ .

Accanto a queste considerazioni che riguardano lo scattering multiplo nel gas residuo, è necessario formulare anche un'altra regola che assicuri di non essere in condizioni di scattering prevalentemente singolo: in altre parole, bisogna che il valore quadratico medio, in una sola collisione, dell'angolo proiettato di scattering sia compatibile con l'apertura della ciambella. Se  $l_s$  è il cammino libero medio degli elettroni nel gas residuo e chiamiamo  $\bar{\chi}^2$  il valore quadratico medio dell'angolo proiettato, mediato sulla distribuzione angolare di uno scattering singolo, allora

$$\bar{\chi}^2 \frac{ds}{l_s} = \bar{\alpha}^2,$$

essendo  $\bar{\alpha}^2$  quello della (II.5).

Segue che deve essere

$$4\lambda^2 \bar{\chi}^2 \ll b^2,$$

per poter trascurare gli effetti dello scattering singolo.

$\bar{\chi}^2$  è dato da

$$\sqrt{\bar{\chi}^2} \simeq \frac{0.00454z^{\frac{1}{2}}}{E_{\text{MeV}}} \text{ rad.}$$

Per il gas residuo aria e per  $E = 2.5 \text{ MeV}$  si ha

$$\sqrt{\bar{\chi}^2} = 3.5 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

*B) Radiazione di sincrotrone.* - L'energia irradiata da un elettrone in una rivoluzione è data dalla nota formula

$$u = 88.5 E^4/R,$$

dove  $R$  è espresso in m,  $E$  in GeV,  $u$  in keV. Questa dissipazione si manifesta sotto forma di fotoni molli, distribuiti approssimativamente secondo lo spettro  $k^{-3}$  ( $k$  è l'energia del fotone) limitato ad una energia massima (testa dello spettro)

$$k_c = \frac{3}{2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^3 \frac{\hbar c}{R}.$$

La testa dello spettro entra nella banda utile di un fotomoltiplicatore (intorno a  $4000 \text{ \AA}$ ) quando, per il nostro e.s., l'energia degli elettroni è di

circa 180 MeV. Da questa energia in poi l'intensità emessa nel visibile rimane sensibilmente costante, se il numero di elettroni circolanti è costante. La testa dello spettro raggiunge, a 1000 MeV, la lunghezza d'onda di 25 Å, corrispondente a fotoni di 0.5 keV.

Complessivamente, il fascio dissipa sotto forma di radiazione, nel nostro e.s., 1.32 GeV durante il ciclo di accelerazione (per 1 GeV di energia massima) e quindi l'impianto a RF deve rifornire, in tutto il ciclo, 2.32 GeV per elettrone.

Tuttavia, il problema del rifornimento di energia non è così importante come quello delle fluttuazioni nell'emissione della radiazione, per energie dal GeV in su. Infatti, quanto abbiamo detto sinora si riferisce al valor medio dell'energia dissipata; ma in realtà l'emissione casuale di fotoni singoli ed energetici produce uno sparpagliamento del fascio (principalmente lungo la coordinata radiale) che complica il problema del contenimento in fase degli elettroni da parte dell'impianto a RF.

La situazione può riassumersi come segue: la posizione dell'orbita istantanea d'equilibrio è fissata dall'energia istantanea delle particelle. Questa energia varia, per salti discreti, ad ogni passaggio dalla cavità; ma in modo coerente, così da produrre le note oscillazioni di sincrotrone attorno all'energia media. Ancora per salti discreti l'energia varia nell'emissione di un fotone della radiazione di sincrotrone; ma questa volta si tratta di un processo stocastico che produce un effetto di diffusione verso le grandi ampiezze di oscillazione di sincrotrone. Senza un effetto di damping compensante, il risultato sarebbe ben presto catastrofico nel senso che gli elettroni raggiungerebbero rapidamente i limiti di stabilità. Il damping (dovuto alla stessa radiazione) contiene la diffusione in modo che la larghezza quadratica media del fascio dipende asintoticamente dalla sola energia secondo la formula di Kolomenski e Lebedev:

$$\langle \Delta r^2 \rangle = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{R\hbar}{mc(1-n)(3-4n)} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2.$$

Per il nostro e.s.

$$\langle \Delta r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \simeq 0.66E \text{ cm} \quad (E \text{ in GeV}).$$

I limiti di stabilità delle oscillazioni di sincrotrone sono dati dalla formula

$$\Delta r_{\max} = R \left| \frac{2eV_0 A}{\pi k(1-n)E} \right|^{\frac{1}{2}} \left( \cotg \varphi_s + \varphi_s - \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

dove  $A = 1 + 2L/\pi R$  è il fattore di allungamento e gli altri simboli sono quelli usati con lo stesso significato nei paragrafi precedenti.

Il grafico della Fig. II.3 riproduce per confronto l'andamento di  $\langle \Delta r^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$  e di  $\Delta r_{\max}$  per varie tensioni di RF. La tensione RF è mantenuta costante in



tutta la parte del ciclo di accelerazione riprodotta nella figura [13]. Da questo grafico si può giudicare qualitativamente il valore della tensione RF necessario per lavorare ad una data energia.

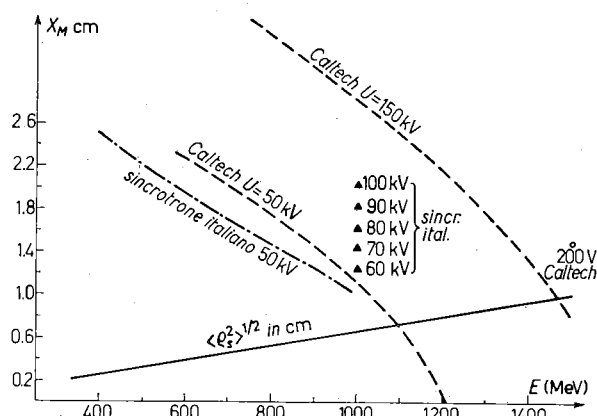


Fig. II.3. - La retta — si riferisce sia al nostro elettrosincrotrone sia a quello dell'Istituto di Tecnologie di California (Caltech). La curva - - - dà la massima ampiezza delle oscillazioni di sincrotrone accettata dal sistema a RF del nostro e.s., per 50 kV di tensione di cresta; i punti ▲ danno il valore di questa ampiezza a 1000 MeV per altre tensioni di cresta. Le curve - - - e il punto ○ danno la stessa ampiezza nel caso dell'e.s. di Caltech. La differenza in forma è essenzialmente dovuta alla differenza nel tipo di eccitazione del magnete.

Ulteriori informazioni sulla frazione di elettroni perduti possono trovarsi con l'aiuto di una formula di Christy (non pubblicata) [14].

La formula di Christy che dà il «rate of loss» dell'intensità del fascio è, sotto speciali ipotesi

$$-\frac{\dot{N}}{N} = \beta \delta \exp[-\delta] = \frac{1}{\tau},$$

dove

$$\beta = \frac{3-4n}{1-n} \frac{W}{E}$$

è la costante di tempo del damping di sincrotrone ( $W$  è la potenza irradiata).  $\delta$  è dato da

$$\delta = \frac{64}{\pi \cdot 55 \sqrt{3}} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{3-4n}{k} \left(1 + \frac{2L}{\pi R}\right) \frac{E}{mc^2} \left(\cotg \varphi_s - \frac{\pi}{2} + \varphi_s\right).$$

La perdita è data da

$$\Delta N = N_i \left\{ 1 - \exp \left[ - \int_0^T \frac{dt}{\tau(E)} \right] \right\},$$

dove  $N_i$  è il numero di particelle iniettate e  $T$  è la durata del ciclo di accelerazione.

Nell'e.s. di Frascati l'effetto non sembra preoccupante per

$$E \leq 1 \text{ GeV}, \quad eV_0 \geq 50 \text{ keV}.$$

C) *Effetti di carica spaziale.* - Gli effetti di carica spaziale, che possono avere grande importanza nel determinare eventuali saturazioni dell'intensità accelerata, si possono dividere in tre categorie:

- 1) interazioni degli elettroni del fascio;
- 2) interazioni tra gli elettroni del fascio e gli ioni prodotti nel gas residuo;
- 3) interazioni tra il fascio e le sue immagini magnetiche.

Trattando 1) e 2) insieme [15] si può concludere che questi due effetti conducono ad una variazione delle frequenze di betatrone, del tipo

$$\begin{aligned} 1 - n &\rightarrow 1 - n + \delta n && \text{(modo radiale),} \\ n &\rightarrow n + \delta n && \text{(modo verticale),} \end{aligned}$$

dove

$$\delta n = - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2 - \varepsilon \right] \frac{N_e e^2 R}{E \Delta \Phi r_0^2};$$

$r_0$  è il raggio della sezione trasversale del fascio (supposto cilindrico),  $\Delta \Phi$  l'estensione in fase di un bunch,  $N_e$  il numero di elettroni circolanti ed  $\varepsilon$  il rapporto  $N_+/N_e$ , con  $N_+$  = numero di ioni positivi presenti nel fascio.

La variazione delle frequenze può condurre a risonanze; in particolare (v. Sez. 2):

$$\begin{aligned} \text{per } \delta n \simeq 0.2 \text{ la risonanza } &p = 1, \quad q = 0, \quad r = -1, \\ \text{per } \delta n \simeq 0.3 \text{ la risonanza } &p = -2, \quad q = 1, \quad r = 1, \\ \text{per } \delta n \simeq 0.4 \text{ la risonanza } &p = 1, \quad q = -1, \quad r = 0. \end{aligned}$$

Una stima del numero di ioni, e quindi di  $\delta n$ , dà, se il gas è aria:

$$\delta n \simeq 0.2,$$

per pressione del gas residuo =  $10^{-5}$  mm Hg e per

$$r_0 = 1 \text{ cm}, \quad N_e = 5 \cdot 10^{10}.$$

Se la sezione del fascio non è circolare, possono prodursi effetti di sdoppiamento del fascio, che sembra siano stati osservati con altri sincrotroni. Un interessante effetto di carica spaziale è il così detto « ion trapping » [15] che consiste nel fatto che le forze dovute al fascio di elettroni catturano gli ioni prodotti. Gli ioni s'accumulano sino a che la repulsione elettrostatica tra ioni non arresta la cattura, e questo avviene per

$$\varepsilon = \frac{2\Delta\Phi}{\pi}.$$

Questo fenomeno può avere considerevole influenza nella determinazione dell'intensità accettata dalla macchina.

L'effetto 3) interazione tra il fascio e le sue immagini magnetiche è stato calcolato nell'ipotesi che i poli fossero piani ed infinitamente estesi, che avessero permeabilità infinita e conducibilità nulla. È anch'esso un effetto traducibile in variazione equivalente di  $n$ . Si trova che un fascio di forma qualunque diviene instabile verticalmente se [16]

$$N_e > \pi^2 n \frac{b^2}{Rr_0} \left( \frac{E}{mc^2} \right),$$

avendo incluso nel calcolo soltanto la prima immagine magnetica su ciascun polo;  $b$  è il traferro,  $r_0 = e^2/mc^2$ . Questo risultato, tradotto in limitazione per la corrente circolante nel nostro e.s., si esprime numericamente

$$I < 0.1B_0,$$

dove  $I$  è la corrente di elettroni iniettati in  $A$  e  $B_0$  l'induzione principale all'iniezione, in gauss.

#### APPENDICE I alla Sezione 2

*Discussione della risonanza*  $p = -2$ ,  $q = 1$ ,  $r = 0$ ,  $n_{\text{ris}} = 0.816$ , ( $n_{\text{ris}} = \frac{3}{4}$  se si tratta di un sincrotrone circolare). È dettata da una irregolarità azimutale di  $B_z$  del tipo  $\Delta B_z/B_0 = A \cos \theta$ , e tende ad esaltare le ampiezze delle oscillazioni radiali.

Non si conosce metodo alcuno per studiare le traiettorie in un racetrack dal punto di vista di una qualunque risonanza. Si considera pertanto un sincrotrone circolare in luogo del racetrack e si suppone che le conclusioni tratte siano valide — in linea di massima — anche quando  $L/R \neq 0$ .

Se indichiamo con  $n_0$  il valore medio di  $n$  su tutta l'estensione della gap e con  $\delta$  la deviazione di  $n_0$  dal valore di risonanza ( $n_0 = n_{ris} + \delta$ ) l'equazione del moto di oscillazione radiale diviene (trascurando termini che non danno un contributo essenziale alla instabilità)

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \left( \frac{1}{4} - \delta - \frac{3}{4} A \cos \theta \right) x = 0,$$

che è una tipica equazione di Mathieu. Si vede dallo studio di questa equazione che le oscillazioni permangono limitate quando sia soddisfatta la condizione

$$|A| \ll 2.4 |n_{ris} - n_0|.$$

#### APPENDICE II alla Sezione 2

Le risonanze  $p = -2$ ,  $q = 3$ ,  $r = 0$ ,  $n_{ris} = 0.635$ ;  $p = -1$ ,  $q = -1$ ,  $r = 2$ ,  $n_{ris} = 0.593$ . Queste risonanze ed in genere le risonanze non lineari possono studiarsi col metodo di Kryloff e Bogoliuboff [17].

Un'applicazione di questo metodo alla prima di esse si trova in una relazione dei Laboratori di Frascati [18].

Questa risonanza è destata dal termine  $\varepsilon x \sin 2\theta$  che è uno degli infiniti contributi del tipo  $\varepsilon_{hk} x^h \sin(k\theta + \gamma_k)$  in cui può pensarsi sviluppata la funzione

$$n(x, \theta, 0) = - \left[ \frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right]_{z=0}.$$

Il coefficiente costante  $\varepsilon$  costituisce il contributo di seconda armonica alla variazione azimutale del termine lineare dello sviluppo in serie di McLaurin della  $n(x, \theta, 0)$ .

La risonanza  $-2, 3, 0$ , tende ad esaltare le ampiezze delle oscillazioni radiali. Tali oscillazioni permangono limitate entro tutta l'estensione radiale della gap quando sia soddisfatta la condizione

$$|\varepsilon x| \ll 8 |n_{ris} - n_0|,$$

dove  $n_0$  è il valore dell'indice del campo mediato su tutta l'estensione radial-azimutale della gap.

La risonanza  $-1, -1, 2$ , è destata dal termine  $\eta x \sin \theta$  che è uno degli infiniti contributi del tipo  $\varepsilon_{hk} x^h \sin(k\theta + \gamma_k)$  in cui può pensarsi sviluppata la funzione

$$n(x, \theta, 0) = - \left[ \frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right]_{z=0}.$$

Il coefficiente costante  $\eta$  costituisce il contributo di prima armonica alla variazione azimutale del termine lineare dello sviluppo in serie di McLaurin della  $n(x, \theta, 0)$ .

Questa risonanza tende ad esaltare le ampiezze delle oscillazioni verticali. Tali oscillazioni permangono limitate entro tutta l'estensione della gap quando sia soddisfatta la condizione

$$|\eta x| \ll 4 |n_{\text{ris}} - n_0|.$$

### APPENDICE III alla Sezione 2

*Effetto delle irregolarità del campo nei sincrotroni a tratti rettilinei [3].*

A) L'andamento del campo. L'andamento del campo nei settori magnetici sia del tipo:

$$(II.7) \quad \begin{cases} B_z = B_0 \left(1 - n \frac{x}{R}\right) (1 + f_z(\theta)), & f_z(\theta) = \left(\frac{\Delta B_z}{B_0}\right)_{r=R}, \\ B_r = -B_0 \left(n \frac{z}{R} + f_r(\theta)\right), & f_r(\theta) = -\left(\frac{B_r}{B_0}\right)_{z=0}, \\ B_0 \sim \text{quantità piccola del 1° ordine.} \end{cases}$$

Tale campo soddisfa le equazioni di Maxwell entro quantità piccole del 1° ordine. I contributi di  $B_0$  alle equazioni del moto risultano del 2° ordine.

L'azimut  $\theta$  è definito soltanto entro i settori magnetici.

Le  $f(\theta)$  siano date dagli sviluppi in serie

$$(II.7') \quad f(\theta) = \sum_m^{\infty} A_m \sin(m\theta + \delta_m). \quad (|f(\theta)| \ll 1).$$

Tali ipotesi sulle irregolarità del campo danno luogo alla soluzione di un problema lineare. Una qualunque altra ipotesi più generale (ad esempio il supporre  $n = n(\theta, r)$  contenuta nella (II.7) porterebbe ad un problema non lineare, e pertanto di difficile soluzione). In condizioni lontane da risonanza si può ragionevolmente presumere che le conclusioni che trarremo con un campo in cui la  $n$  della (II.7) sia costante e del valore voluto, siano non, molto diverse da quelle in cui, come effettivamente accade, è  $n = n_0 + \Delta n$  con  $\Delta n$  contenuto entro limiti sufficientemente stretti.

B) Il caso del sincrotrone circolare [19]. L'orbita chiusa. Nel caso del sincrotrone circolare l'equazione differenziale della traiettoria determinata dal campo (II.7) è

$$(II.8) \quad \frac{d^2 \xi(\theta)}{d\theta^2} + \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \xi(\theta) \simeq -Rf(\theta),$$

dove  $\xi(\theta)$  rappresenta la componente (radiale o verticale) dello scostamento dall'orbita principale (cioè dal cerchio  $r=R, z=0$ ). La (II.8) è valida a meno di quantità piccole del 2° ordine.

In essa cioè:

$$\begin{cases} \xi = x = r - R, \\ \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 = 1 - n; \end{cases} \quad \text{se consideriamo le oscillazioni radiali}$$

$$\begin{cases} \xi = z, \\ \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 = n. \end{cases} \quad \text{se consideriamo le oscillazioni verticali}$$

La soluzione della (II.8) può mettersi per ciascuna delle due componenti nella forma

$$(II.9) \quad \xi(\theta) = \chi(\theta) + \zeta(\theta),$$

in cui

$$(II.9') \quad \zeta(\theta) = R \sum_1^{\infty} \frac{A_m}{m^2 - (R/\lambda)^2} \sin(m\theta + \delta_m),$$

$$(II.9'') \quad \chi(\theta) = \chi_0 \cos \frac{R}{\lambda} \theta + \lambda \chi_0' \sin \frac{R}{\lambda} \theta \quad \left( ' \equiv \frac{d}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} \right).$$

La (II.9) può interpretarsi così: il termine  $\chi(\theta)$  rappresenta oscillazioni di betatrone del solito tipo, le quali però non avvengono intorno all'orbita principale, ma intorno ad un'orbita deformata di cui  $\zeta(\theta)$  rappresenta lo scostamento (radiale o verticale) rispetto all'orbita principale.

In generale l'orbita degli elettroni, descritta dalla  $\xi(\theta)$ , non è una linea chiusa (perchè il periodo del termine  $\chi(\theta)$  è in genere diverso per le due componenti e non commensurabile con  $2\pi$ ); però l'orbita descritta dal solo termine  $\zeta(\theta)$ , cioè quella che sarebbe percorsa in assenza di oscillazioni di betatrone, è chiusa perchè

$$(II.10) \quad \zeta(\theta + 2\pi) = \zeta(\theta).$$

La chiameremo perciò orbita chiusa. Se il campo fosse regolare ( $f(\theta) \equiv 0$ ) essa coinciderebbe naturalmente con l'orbita principale.

La cosa più importante da notare, infine, è che se  $A_m$  è l'ampiezza della  $m$ -esima armonica (II.7') dello sviluppo delle irregolarità, l'ampiezza corrispondente per la deformazione dell'orbita principale (II.9') risulta proporzionale ad  $A_m/[m^2 - (R/\lambda)^2]$  cioè: nel caso del sincrotrone circolare contribuiscono alla deformazione dell'orbita principale solo le armoniche più basse, e pertanto solo le  $A_m$  di basso ordine vanno contenute entro opportuni limiti per ottenere una deformazione di piccola ampiezza.

C) L'inserzione dei tratti rettilinei. L'orbita chiusa. Le conclusioni relative al sincrotrone circolare non sono più valide se tra i quattro quadranti esistono tratti privi di campo di lunghezza  $L$  confrontabile con  $R$ .

Anche nel caso del sincrotrone a sezioni diritte si può definire l'orbita chiusa e l'oscillazione di betatrone libera attorno ad essa.

Il calcolo dell'orbita chiusa nel caso  $L \neq 0$  è stato già affrontato da BLACHMAN [20] con l'uso del metodo di soluzione di Sturm-Liouville delle equazioni differenziali. Tale trattazione permette di stimare correttamente l'effetto della sola prima armonica dello sviluppo in serie di Fourier delle irregolarità del campo.

Il formalismo delle matrici permette di trovare la soluzione del problema nel caso di un'armonica  $m$  qualunque. Tale calcolo è lungo e laborioso; è più comodo fornire al lettore gli elementi sufficienti per verificare che la soluzione (II.12) è la soluzione cercata per il caso di un racetrack.

L'andamento del campo nei settori magnetici sia dato dalle (II.7) e (II.7').

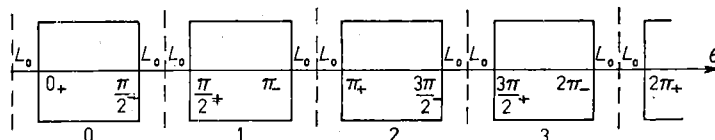


Fig. II.4.

Distinguiamo i 4 settori magnetici col numero d'ordine  $h=0, 1, 2, 3$  (nel 1° giro), 4, 5, 6, 7, (nel 2° giro) (Fig. II.4). La lunghezza del settore diritto sia  $L=2L_0$ . Nel settore  $h$ -esimo sarà

$$h \frac{\pi}{2} + \leq \theta \leq (h+1) \frac{\pi}{2} - .$$

La soluzione cercata per l'orbita deve:

- 1) soddisfare alla equazione differenziale (II.8);
- 2) soddisfare alle condizioni di raccordo e continuità delle pendenze

$$(II.11) \quad \begin{cases} \zeta' \left( h \frac{\pi}{2} + \right) = \zeta' \left( h \frac{\pi}{2} - \right) = \zeta' \left( h \frac{\pi}{2} \right), \\ \zeta \left( h \frac{\pi}{2} + \right) = \zeta \left( h \frac{\pi}{2} - \right) + 2L_0 \zeta' \left( h \frac{\pi}{2} \right), \end{cases}$$

$$' = \frac{d}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta}; \quad h = 0, 1, 2, 3 \text{ (1° giro); } 4, 5, 6, 7 \text{ (2° giro); etc. ;}$$

- 3) soddisfare alla condizione di periodicità (II.10).

Inoltre  $\zeta(\theta)$  deve tendere all'espressione (II.9') relativa al sincrotrone circolare quando  $L_0$  tende a 0.

Denotiamo con  $\zeta_h(\theta)$  il valore della deformazione (orizzontale o verticale) dell'orbita principale nel settore  $h$ -esimo per effetto della  $m$ -esima armonica

(l'indice  $m$  nella notazione  $\zeta_h(\theta)$  rimane sottinteso). Posto

$$\theta_h = \theta - h \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 \leq \theta_h \leq \frac{\pi}{2} \\ h \frac{\pi}{2} + \leq \theta_h \leq (h+1) \frac{\pi}{2} \end{pmatrix},$$

si ha:

— per  $m$  dispari

$$(II.12 \text{ disp.}) \left\{ \begin{array}{l} \zeta_0(\theta) = \frac{A_m}{m^2 - (R/\lambda)^2} \left[ \frac{mL_0}{\cos \varphi} \left( \sin \delta_m \sin m \frac{\pi}{2} + a \cos \delta_m \right) \cos \frac{R}{\lambda} \theta_0 + \right. \\ \quad \left. + \frac{mL_0}{\cos \varphi} b \cos \delta_m \sin \frac{R}{\lambda} \theta_0 + R \sin (m\theta_0 + \delta_m) \right], \\ \zeta_1(\theta) = \frac{A_m}{m^2 - (R/\lambda)^2} \left[ \frac{mL_0}{\cos \varphi} \left( \cos \delta_m - a \sin m \frac{\pi}{2} \sin \delta_m \right) \cos \frac{R}{\lambda} \theta_1 + \right. \\ \quad \left. + \frac{mL_0}{\cos \varphi} b \sin m \frac{\pi}{2} \sin \delta_m \sin \frac{R}{\lambda} \theta_1 + R \sin m \frac{\pi}{2} \cos (m\theta_1 + \delta_m) \right], \\ \zeta_2(\theta) = -\zeta_0(\theta_2); \quad \zeta_3(\theta) = -\zeta_1(\theta_3); \quad \zeta_4(\theta) = \zeta_0(\theta_4); \quad \dots \end{array} \right.$$

— per  $m$  pari

$$(II.12 \text{ pari}) \left\{ \begin{array}{l} \zeta_0(\theta) = \frac{A_m}{m^2 - (R/\lambda)^2} \left[ \frac{mL_0 b}{\sin^2 \varphi} \left\{ b + \frac{L_0}{\lambda} \left( a - \cos m \frac{\pi}{2} \right) \right\} \cos \delta_m \cos \frac{R}{\lambda} \theta_0 + \right. \\ \quad \left. + \frac{mL_0 b}{\sin^2 \varphi} \left\{ \frac{L_0}{\lambda} b - \left( a + \cos m \frac{\pi}{2} \right) \right\} \cos \delta_m \sin \frac{R}{\lambda} \theta_0 + \right. \\ \quad \left. + R \sin (m\theta_0 + \delta_m) \right], \\ \zeta_1(\theta) = \cos m \frac{\pi}{2} \zeta_0(\theta_1); \quad \zeta_2(\theta) = \zeta_0(\theta_2); \\ \zeta_3(\theta) = \zeta_1(\theta_3); \quad \zeta_4(\theta) = \zeta_0(\theta_4); \quad \dots \end{array} \right.$$

L'ultimo termine in ogni parentesi quadra è il contributo di sincrotrone circolare.

In queste espressioni risolutive è

$$(II.12') \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \cos \frac{R}{\lambda} \frac{\pi}{2}, \\ b = \sin \frac{R}{\lambda} \frac{\pi}{2}, \end{array} \right. \quad \cos \varphi = a - \frac{L_0}{\lambda} b.$$

D) Correzione globale dell'orbita chiusa. Si può annullare l'effetto di racetrack sull'orbita chiusa dovuta alle irregolarità mediante l'uso di campi magnetici operanti nelle sezioni diritte. Nella approssimazione di irre-



golarità di campo lineari, come qui abbiamo supposto, sono sufficienti quattro campi correttivi in ogni sezione diritta (due per le oscillazioni orizzontali e due per le verticali).

APPENDICE I alla Sezione 3

Calcolo del rendimento medio all'iniezione [4].

A) Le condizioni affinché la generica particella sia salva alla fine dell'iniezione. Le condizioni affinché una generica particella iniettata si salvi dall'urto contro l'iniettore e non esca dalla zona utile (\*) sono le seguenti:

$$(II.13) \quad \begin{cases} \xi \cos k\Phi + Y_0 \sin k\Phi < k\sigma + (\bar{x} - \Delta r)(1 - \cos k\Phi) & \text{(iniettore),} \\ [(\bar{x} - \Delta r) + \xi]^2 + Y_0^2 < [(\bar{x} - \Delta r) + D_e]^2 & \text{(confine esterno),} \\ [(\bar{x} - \Delta r) + \xi]^2 + Y_0^2 < [a' - (\bar{x}_{\max} - \Delta r) - D_e]^2 & \text{(confine interno).} \end{cases}$$

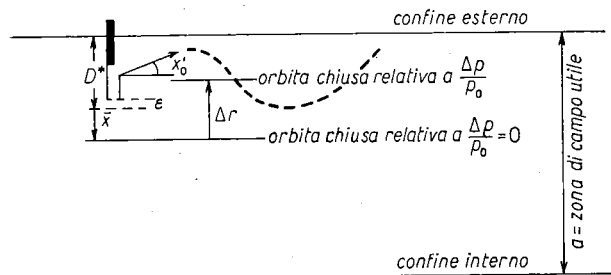


Fig. II.5.

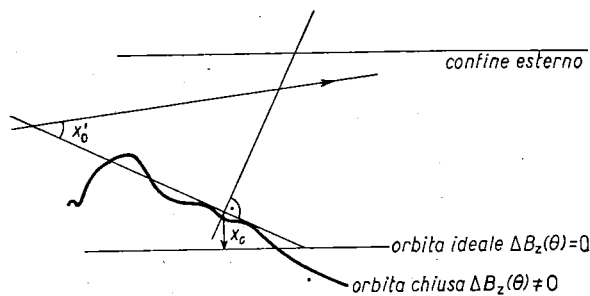


Fig. II.6.

In esse si tiene conto dell'effetto delle irregolarità azimutali del campo  $B_z(\theta) = B_0 + \Delta B_z(\theta)$  sulle oscillazioni delle particelle. Queste condizioni (II.13) possono essere interpretate formalmente come le condizioni di non urto per una iniezione in un sincrotrone ideale (privo di irregolarità azimutali del campo) con una apertura radiale  $a' = a - 2A$  (dove  $A$  è l'ampiezza massima della deformazione del cerchio d'equilibrio dovuta a tale irregolarità) e con un affondamento equivalente dell'iniettore

$$D_e = D^* - (A - x_c) > 0,$$

dove:

- $D^*$  è l'affondamento vero del deflettore elettrostatico che inietta le particelle (contato a partire dal confine esterno della ciambella);
- $\epsilon$  è lo spessore del labbro interno del deflettore;

(\*) Per una definizione di zona utile vedi Appendice II alla Sez. 3.

$\bar{x}$  è lo scostamento dell'orbita chiusa (relativa a  $\Delta p/p_0 = 0$ ) dal bordo interno del deflettore;

$\xi$  individua il punto in cui esce l'elettrone dal deflettore ( $\xi$  è contata dal bordo interno del deflettore);

$\Delta r$  è lo scostamento dell'orbita chiusa relativa a  $\Delta p/p_0$  contato dall'orbita chiusa relativa a  $\Delta p/p_0 = 0$ ;

$\sigma$  è la spiralizzazione dell'orbita chiusa all'iniezione;

$x_e$  è lo scostamento dell'orbita chiusa dall'orbita ideale di equilibrio nell'azimut dove è localizzata la bocca del deflettore;

$k$  è il numero di rivoluzioni dopo l'istante di iniezione della generica particella;

$\Phi$  caratterizza la periodicità delle oscillazioni radiali di betatrone nel racetrack;

$Y_0 = \lambda_\Delta x'_0$ ;  $\lambda_\Delta$  caratterizza la lunghezza d'onda delle oscillazioni radiali di betatrone nel racetrack. L'angolo  $x'_0$  è contato rispetto all'orbita chiusa sotto l'iniettore. Si presume di inclinare opportunamente il deflettore come nella Fig. II.6 (nella Fig. II.5 non è stata rappresentata l'inclinazione del deflettore per chiarezza di disegno);

$\bar{x}_{\max}$  = valore massimo di  $\bar{x}$  nell'istante in cui è cessata l'iniezione.

B) Calcolo grafico del rendimento medio all'iniezione  $\bar{q}$ . Per un certo valore di  $\bar{x}$  (che determina il trascorrere del tempo durante l'iniezione),

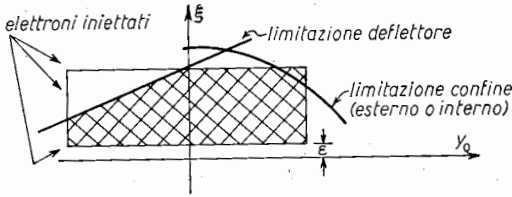


Fig. II.7.

di  $\sigma$ , di  $\Delta r = (R/(1-n_0))(\Delta p/p_0)$ , di  $D_e$  e di  $\bar{x}_{\max}$ , nel piano  $(Y_0, \xi)$  le limitazioni (II.13) indicano quanti elettroni iniettati in quell'istante sopravviveranno alla fine dell'iniezione. Si ottengono figure del tipo della Fig. II.7.

L'area degli elettroni che si salvano è quella tratteggiata. Se  $q(\tau) d\tau$  è la frazione delle particelle iniettate nell'intervallo di

tempo  $(\tau, d\tau)$  che sopravviveranno alla fine dell'iniezione, si definisce come rendimento medio d'iniezione la quantità

$$\bar{q} = \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} q(\tau) d\tau = \frac{1}{\bar{x}_{\max} - \bar{x}_{\min}} \int_{\bar{x}_{\min}}^{\bar{x}_{\max}} q(\tau) d\bar{x}.$$

Se  $I$  è l'intensità di corrente degli elettroni uscenti dalla bocca del deflettore, segue che il numero degli elettroni salvi alla fine dell'iniezione è

$$I \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} q(\tau) d\tau = I (T/\sigma) \int_{\bar{x}_{\min}}^{\bar{x}_{\max}} q(\tau) d\bar{x}.$$

Il calcolo numerico di  $\bar{q}$  si fa nel modo indicato in Fig. II.8.

Si trova che per ogni spiralizzazione  $\sigma$  il rendimento optimum si ottiene

quando

$$\begin{cases} D_e + \bar{x}_{\max} \approx a'/2, \\ D_e \ll \bar{x}_{\max} - \bar{x}_{\min}, \end{cases}$$

e non muta apprezzabilmente al variare di  $D_e$  ed  $\bar{x}_{\max}$  purchè siano soddisfatte tali condizioni.

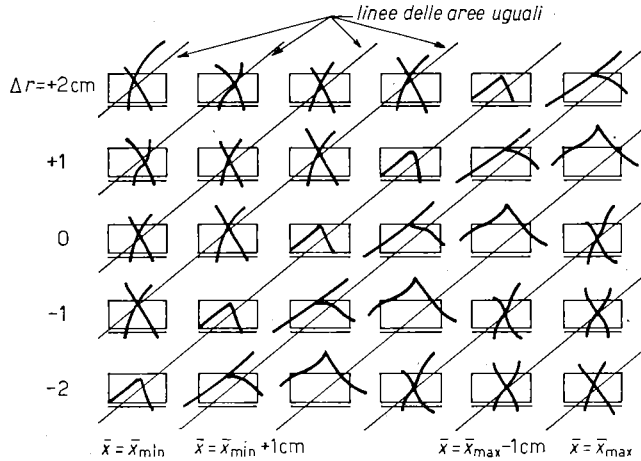


Fig. II.8.

I risultati del calcolo che si riferiscono al nostro e.s. sono compendati nella Fig. II.9. Per  $\sigma = 0.2$  cm la durata dell'iniezione per un rendimento optimum è di  $\approx 2.5 \mu s$  e la frazione di particelle sopravvissute è il 17%. Per  $\sigma > 0.4$  cm la frazione di particelle salvate varia con la legge  $\sigma^{-1}$ , e ciò perchè il tempo utile d'iniezione decresce col crescere di  $\sigma$ , mentre  $\bar{q}$  rimane praticamente costante.

Si può calcolare che con un tracking parziale si possono ottenere rendimenti del (15 ÷ 30)% anche con spiralizzazioni maggiori.

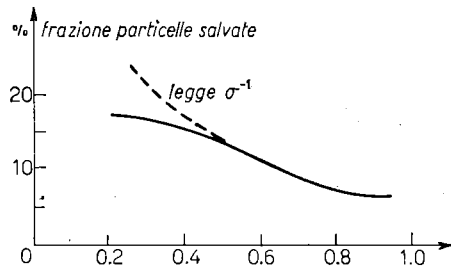


Fig. II.9.

APPENDICE II alla Sezione 3

*Larghezza della zona utile del campo magnetico nelle macchine a focalizzazione debole [21].*

Ci riferiremo, tanto per fissare le idee, all'andamento del campo magnetico dell'e.s. di Frascati (in cui ignoreremo l'esistenza dei tratti rettilinei) ma la trattazione qui fatta può essere immediatamente adattata a qualunque altro elettro o protosincrotrone a focalizzazione debole o sincrociclotrone.

Durante tutto il ciclo d'accelerazione l'indice del campo

$$n(x) = n_{z=0} = - \left[ \frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right]_{z=0},$$

sul piano mediano della gap ha un andamento radiale del tipo illustrato in Fig. II.10.

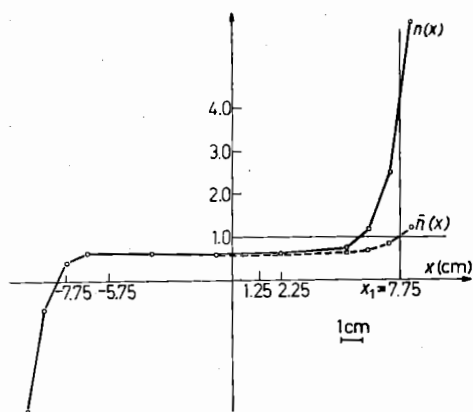


Fig. II.10. - Grafico ricavato dalla misura di  $n(x)$  in c.a. a 23 gauss sul piano mediano con peakers. Posizione azimutale a m 0.63 nel quadrante W (misura n. 5A del 28-10-57).

Supporteremo per semplicità la funzione  $n_{z=0}(x)$  mai decrescente in tutto l'intervallo che ci interessa, ma ciò non è essenziale nelle conclusioni tratte.

Ci proponiamo qui di determinare gli eventuali confini  $x_2$  ed  $x_1$  entro i quali le oscillazioni radiali (quelle che avvengono sul piano mediano, cioè in assenza di oscillazioni verticali) permangono stabili. In questo calcolo ignoreremo qualunque altra perturbazione del campo.

A) La forma assunta per il campo verticale sul piano mediano. Le equazioni di Maxwell e le condizioni di simmetria

$$\begin{cases} B_z(x, z) \equiv B_z(x, -z), \\ B_r(x, z) \equiv -B_r(x, -z), \\ B_\theta(x, z) \equiv 0, \end{cases}$$

permettono di individuare  $B_z(x, z)$  e  $B_r(x, z)$  quando sia dato  $B_z(x, 0)$ . Scegliamo per  $B_z(x, 0)$  l'espressione

$$(II.14) \quad B_z(x, 0) = B_0 \left[ 1 - \bar{n}(x) \frac{x}{R} \right],$$

in cui  $\bar{n}(x)$  non è da confondersi con  $n(x)$  ma piuttosto è una grandezza di cui è bene precisare subito il significato. Allo scopo cominciamo con l'osservare che per quanto detto,  $B_z(x, z)$  e  $B_r(x, z)$  devono avere la forma

$$(II.14') \quad \begin{cases} B_r(x, z) = -B_0 \left[ \left( \bar{n}(x) + x \frac{d\bar{n}(x)}{dx} \right) \frac{z}{r} + \sum_1^\infty \psi_{2k+1}(x) \left( \frac{z}{R} \right)^{2k+1} \right], \\ B_z(x, z) = B_0 \left[ 1 - \bar{n}(x) \frac{x}{R} + \sum_1^\infty \varphi_{2k}(x) \left( \frac{z}{R} \right)^{2k} \right], \end{cases}$$

dove, supponendo  $\bar{n}(x)$  una serie di potenze di  $x$  con coefficienti assegnati, le  $\varphi_{2k}$  e  $\psi_{2k+1}$  sono anch'esse serie di potenze in  $x$  con coefficienti ricavabili da quelli di  $\bar{n}(x)$  mediante opportune formule ricorrenti.

Calcolando  $n$  dalla prima delle (II.18') si trova

$$(II.15) \quad n_{z=0} = - \left[ \frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right]_{z=0} = \frac{1+x/R}{1-\bar{n}(x)x/R} \left( \bar{n}(x) + x \frac{d\bar{n}(x)}{dx} \right).$$

Se si suppone che  $\bar{n}(x)$  sia una quantità il cui ordine di grandezza sia al massimo  $\sim 1$  si ha, trascurando quantità dell'ordine  $x/R$  rispetto all'unità,

$$(II.15') \quad n_{z=0} = \bar{n}(x) + x \frac{d\bar{n}(x)}{dx},$$

ovvero

$$(II.16) \quad \bar{n}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x n_{z=0}(x) dx,$$

cioè: la quantità  $\bar{n}(x)$  di cui alla formula (II.14) scelta per il campo  $B_z$  sul piano mediano è nient'altro che il valor medio di  $n_{z=0}(x)$  fatto tra gli estremi 0 ed il punto  $x$  considerato.

Si osservi ancora che dalla seconda delle (II.14') si ha — trascurando quantità dell'ordine  $(z/R)^2$  rispetto all'unità —  $B_r(x, z) = -B_0 n_{z=0}(x)(z/R)$ , cosicchè l'equazione del moto per le oscillazioni verticali si scrive, al 1° ordine,

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + n(x)z = 0,$$

di modo che la forza di richiamo per queste oscillazioni dipende dalla oscillazione  $x(\theta)$ .

B) L'equazione del moto radiale. La forza di Lorentz a cui è sottoposta la particella nel piano mediano è

$$(II.17) \quad m\ddot{x} = m r \omega^2 - \frac{e}{c} r \omega B_z(x, 0).$$

Tenendo conto che è, a meno della quantità  $(1/r)(dx/d\theta)^2$ ,

$$\frac{\ddot{x}}{\omega^2} = \frac{d^2 x}{d\theta^2},$$

si ha dalla (II.17)

$$(II.17') \quad \frac{d^2 x}{d\theta^2} + r \left( \frac{e B_z(x, 0) r}{m \omega_0 R} - 1 \right) = 0,$$

ovvero, essendo  $m \omega_0 c = e B_0$ ,

$$(II.17'') \quad \frac{d^2 x}{d\theta^2} + r \left( \frac{B_z(x, 0) r}{B_0 R} - 1 \right) = 0.$$

Sostituendo in essa la (II.14) e trascurando ancora quantità dell'ordine  $x/R$  rispetto all'unità risulta

$$(II.18) \quad \frac{d^2x}{d\theta^2} + [1 - \bar{n}(x)]x = 0,$$

che è un'equazione differenziale del moto valida anche nei punti  $x$  dove  $n_{z=0}(x)$  è molto diverso da 0.61, cioè anche nei punti dove il campo  $B_z(x, 0)$  decresce in modo decisamente non lineare.

C) Esistenza di una seconda orbita d'equilibrio. Si vede subito che la (II.18) ammette l'integrale particolare  $x = x_1 =$  valore per cui  $\bar{n}(x_1) = 1$ .

Ciò vuol dire che il cerchio di raggio  $R + x_1$  è, oltre al cerchio di raggio  $R$ , un'orbita di equilibrio.

Ciò si può vedere anche cercando la distanza  $x_1$  per cui è

$$B_0 R = B_z(x_1, 0)(R + x_1).$$

Si trova, trascurando  $x/R$  rispetto all'unità, che tale distanza è appunto quella in cui  $\bar{n}(x)$  assume il valore 1.

Faremo vedere oltre che tale orbita è un'orbita di equilibrio instabile, cioè che  $x_1$  è il limite esterno della zona di stabilità delle oscillazioni radiali.

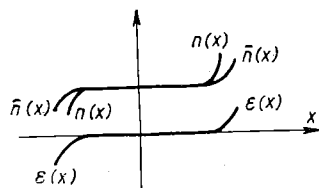


Fig. II.11.

D) Intervallo di stabilità dell'equazione del moto radiale. Riprendiamo l'eq. (II.18) e poniamo in essa

$$(II.19) \quad \bar{n}(x) = n_0 + \varepsilon(x),$$

con  $n_0 = n(0)$ .

In Fig. II.11 sono rappresentate le curve  $n(x)$ ,  $\bar{n}(x)$ ,  $\varepsilon(x)$ .

Con la sostituzione (II.19) la (II.18) diviene

$$(II.20) \quad \frac{d^2x}{d\theta^2} + (1 - n_0)x - \varepsilon(x)x = 0.$$

Si riesce a compiere una prima integrazione di questa equazione moltiplicando per  $dx$  ed integrando fra i limiti  $(x_0, dx_0/d\theta)$  e  $(x, dx/d\theta)$ . Si trova

$$(II.20') \quad \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} (1 - n_0)x^2 - \int_0^x \varepsilon(x) x dx = c_0,$$

dove

$$(II.20'') \quad c_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{dx_0}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} (1 - n_0)x_0^2 - \int_0^{x_0} \varepsilon(x) x dx.$$

Per limitarci a considerare soltanto soluzioni  $x(\theta)$  reali (limitate o no), basterà limitarci a considerare le soluzioni  $x(\theta)$  per cui è  $(dx/d\theta)^2 \geq 0$ , cioè le soluzioni  $x(\theta)$  per cui è

$$(II.20''') \quad f(x) \equiv \frac{1}{2} (1 - n_0) x^2 - \int_0^x \varepsilon(x) x dx < c_0.$$

Tenendo conto che  $\varepsilon(x)$  ha la forma di cui alla Fig. II.11 la discussione della (II.20''') porta alle seguenti conclusioni:

L'estremo limite destro di  $x$  per cui le soluzioni sono limitate è quello dove la  $f(x)$  raggiunge il suo massimo.

Calcolando questo massimo si trova che esso ha luogo nel punto  $x_1$  dove  $\varepsilon = 1 - n_0$ , cioè ricordando la (II.19), dove

$$\bar{n} = 1.$$

In conclusione: la larghezza utile della ciambella si estende fino al punto  $x = x_1$  dove (ricordando la (II.14))

$$\frac{B_0 - B_z(x, 0)}{B_0} = \frac{x}{R}.$$

Da qui si vede che il confine esterno della zona utile si estende più all'infuori del punto dove  $n = 1$ , mentre il confine interno  $x_2$  resta determinato dal valore di  $x$  per cui  $f(x_2) = f(x_1)$ .

Per fissare le idee abbiamo calcolato la  $x_1$  dal grafico di Fig. II.10 relativo alla misura 5A sull'indice del campo a 23 gauss in c.c. eseguita vicino alla testata del quadrante W dell'e.s. in fase di montaggio. Come si vede pur estendendosi il « pianerottolo » di  $n$  di circa 5 cm verso l'esterno, la larghezza utile agli effetti delle orbite (quando l'orbita di equilibrio è  $R$ ) è di quasi 8 cm.

#### *Notazioni generali usate nella Parte II.*

- $\mu$  = sfasamento caratteristico delle oscillazioni di betatrone lungo un elemento periodico della macchina;
- $L$  = lunghezza delle sezioni diritte;
- $R$  = raggio di curvatura nei quadranti;
- $n$  = indice di campo;
- $x$  = distanza radiale dall'orbita d'equilibrio;
- $z$  = distanza dal piano magnetico mediano;
- $B_0$  = induzione magnetica sull'orbita principale;
- $B_r$  = componente radiale dell'induzione;
- $B_z$  = componente verticale dell'induzione;
- $\sigma$  = spiralizzazione (contrazione, in un giro, del raggio dell'orbita d'equilibrio);
- $T_0$  = periodo di rivoluzione relativo all'orbita principale;
- $\dot{B}_0$  = derivata di  $B_0$  rispetto al tempo;

- $k$  = armonica della cavità a RF;  
 $V$  = tensione di picco della cavità a RF;  
 $E_i$  = energia totale di iniezione;  
 $\lambda$  = lunghezza d'onda delle oscillazioni di betatrone diviso  $2\pi$ ;  
 $\varphi_s$  = fase sincrona (oscillazioni di fase).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] E. PERSICO: Relazione no. T 1 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1953).  
 [2] A. TURRIN: *Nuovo Cimento*, **8**, 511 (1958).  
 [3] A. TURRIN: Relazione no. T 22 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1955).  
 [4] C. BERNARDINI e A. TURRIN: Relazione no. T 28 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1956).  
 [5] C. BERNARDINI: Relazione no. T 21 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1955).  
 [6] E. PERSICO: Relazione no. T 4 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1953).  
 [7] C. BERNARDINI ed E. PERSICO: Relazione no. T 12 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1954).  
 [8] E. PERSICO: *Suppl. Nuovo Cimento*, **2**, 459 (1955).  
 [9] E. PERSICO: Relazione no. T 19 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1955).  
 [10] C. BERNARDINI: Relazione no. T 11 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1954).  
 [11] P. G. SONA: Relazione no. PT 4 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1953).  
 [12] C. BERNARDINI: *Proc. CERN Symposium on High-Energy Accelerators and Pion Physics*, vol. 1 (1956), p. 463.  
 [13] C. BERNARDINI: Relazione no. T 29 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1957).  
 [14] C. BERNARDINI e B. TOUSCHEK: Nota interna no. 34 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1960).  
 [15] C. BERNARDINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 804 (1958).  
 [16] C. BERNARDINI: Nota interna no. 12 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1959).  
 [17] N. KRYLOFF e N. BOGOLIUBOFF: *Introduction to Non Linear Mechanics* (Princeton, 1947).  
 [18] A. TURRIN: Relazione no. T 36 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1958).  
 [19] F. K. GOWARD: *Proc. Phys. Soc. (London)*, **61**, 28 (1948).  
 [20] N. M. BLACHMAN: *Rev. Sci. Instr.*, **22**, 569 (1951).  
 [21] A. TURRIN: Relazione no. T 35 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1958).

Altra bibliografia riguardante gli argomenti trattati nella presente Parte.

*Traiettorie*

- E. D. COURANT: *Journ. Appl. Phys.*, **20**, 611 (1949).  
 D. M. DENNISON e T. H. BERLIN: *Phys. Rev.*, **70**, 764 (1946).  
 D. BOHM e L. FOLDY: *Phys. Rev.*, **70**, 249 (1946).  
 N. M. BLACHMAN ed E. D. COURANT: *Rev. Sci. Instr.*, **20**, 596 (1949).  
 S. E. BARDEN: *Proc. Phys. Soc. (London)*, B **64**, 579 (1951).  
 N. M. BLACHMAN: *Rev. Sci. Instr.*, **22**, 569 (1951).



- R. SERBER: *Phys. Rev.*, **70**, 434 (1946).  
 F. K. GOWARD: *Proc. Phys. Soc. (London)*, **61**, 28 (1948).

*Variazioni adiabatiche dell'intensità*

*Scattering*

- J. M. GREENBERG e T. H. BERLIN: *Rev. Sci. Instr.*, **22**, 293 (1951).  
 N. M. BLACHMAN ed E. D. COURANT: *Phys. Rev.*, **74**, 140 (1948).  
 S. CHANDRASEKHAR: *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 31 (1943).  
 E. D. COURANT: *Rev. Sci. Instr.*, **24**, 836 (1953).  
 P. G. SONA: Relazione no. PT 5 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1954).  
 C. BERNARDINI: *Proc. CERN Symposium on High-Energy Accelerators and Pion Physics*,  
 vol. 1 (1956), p. 463.  
 M. J. MORAVCSIK e J. M. SELLEN: *Rev. Sci. Instr.*, **26**, 1158 (1955).

*Radiazione*

- L. OSBORNE e D. RITSON: Cambridge Accelerator Project Report, no. 7 (1955).  
 A. KOLOMENSKII e A. LEBEDEV: *Abstract of Reports of All-Union Conference on High-Energy Physics* (Moscow, 1956).  
 K. ROBINSON e D. RITSON: Cambridge Accelerator Project Report, no. 14 (1955).  
 K. W. ROBINSON: Cambridge Electron Accelerator Report CEA-14 (1956).  
 R. F. CHRISTY: *Synchrotron Beam Loss due to Quantum Fluctuations in the Radiation*,  
 Caltech Internal Report (1957).  
 M. SANDS: *Nuovo Cimento*, **15**, 599 (1960).  
 M. SANDS: *Phys. Rev.*, **97**, 470 (1955).  
 A. A. KOLOMENSKII e A. N. LEBEDEV: *Nuovo Cimento*, **11**, 458 (1959).  
 F. BLOCH e A. NORDSIECK: *Phys. Rev.*, **52**, 54 (1937).  
 J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **75**, 1912 (1949).  
 L. LANDAU ed E. LIFSHITZ: *The Classical Theory of Fields* (Reading, Mass., 1951).  
 L. I. SCHIFF: *Rev. Sci. Instr.*, **17**, 6 (1946).  
 J. S. NODVICK e D. S. SAXON: University of California, Tech. Report no. 21 (1954).  
 P. G. SONA: Relazione no. PT 6 dei Laboratori Nazionali di Frascati (1954).  
 L. ARZIMOVITCH e I. POMERANCHUK: *Žurn. Ėksp. Teor. Fiz.*, **9**, 267 (1945).  
 D. H. TOMBOULIAN e P. L. HARTMAN: *Phys. Rev.*, **102**, 1423 (1956).  
 D. R. CORSON: *Phys. Rev.*, **90**, 748 (1953).  
 F. R. ELDER, R. V. LANGMUIR e H. C. POLLACK: *Phys. Rev.*, **74**, 52 (1948).  
 J. S. NODVICK e D. S. SAXON: *Phys. Rev.*, **96**, 180 (1954).  
 A. A. SOKOLOV, I. M. TERNOV e G. M. STRACOVSKII: *Sov. Phys. JETP*, **31**, 439 (1956).  
 K. W. ROBINSON: *Phys. Rev.*, **111**, 373 (1958).  
 A. A. KOLOMENSKII e A. LEBEDEV: *Suppl. Nuovo Cimento*, **7**, 43 (1958).  
 K. W. ROBINSON: Cambridge Electron Accelerator Report CEA-69 (1958).  
 A. N. MATVEEV: *Sov. Phys. JETP*, **33**, 1254 (1957).  
 E. M. MOROZ: *Sov. Phys. JETP*, **33**, 1309 (1957).  
 M. SANDS: *Proc. CERN Symposium on High-Energy Accelerators and Pion Physics*,  
 vol. 1 (1956), p. 298.  
 D. IVANENKO e I. POMERANCHUK: *Phys. Rev.*, **65**, 343 (1944).  
 J. S. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **70**, 798 (1946).  
 N. FRANK: *Phys. Rev.*, **70**, 177 (1946).  
 D. BOHM e L. FOLDY: *Phys. Rev.*, **70**, 249 (1946).

*Effetti di carica spaziale*

C. BERNARDINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 804 (1958).

*Meccanismo di cattura a RF*

E. PERSICO: *Suppl. Nuovo Cimento*, **2**, 459 (1955).

A. A. KOLOMENSKII e A. N. LEBEDEV: *Proc. CERN Symposium on High-Energy Accelerators and Pion Physics*, vol. **1** (1956), p. 447.